

УДК 517.977

**ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ  
КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ****Р.К.ТАГИЕВ, Р.А.КАСУМОВ***Бакинский Государственный Университет  
Ленкоранский Государственный Университет  
r.tagiyev@list.ru*

*Рассматривается задача оптимального управления для квазилинейного параболического уравнения с управлениями в коэффициентах и с функционалом цели по границе области. Исследованы вопросы корректности постановки задачи и установлено необходимое условие оптимальности.*

**Ключевые слова:** оптимальное управление, параболическое уравнение, условие оптимальности

Задачи оптимального управления для параболических уравнений, когда управляющие функции входят в коэффициенты уравнений для состояний, в том числе в коэффициенты при старших производных, встречаются в различных приложениях. Исследование этих задач встречается серьезными трудностями, связанные с их некорректностью, невыпуклостью и нелинейностью [1–3]. В таких задачах функционалом цели не является выпуклым даже в том случае, когда уравнения, описывающие состояние процесса, линейные и функционал цели является линейным функционалом от решений этих уравнений. Нелинейность еще более усугубляется, если состояния процессов описываются нелинейными уравнениями.

В работах [1–8] и др. изучались задачи оптимального управления коэффициентами линейных параболических уравнений. Такие задачи для квазилинейных параболических уравнений менее изучены [9–12]. Кроме того, мало изучены задачи оптимального управления коэффициентами параболических уравнений с функционалами цели по границе области, имеющие большое прикладное значение [3].

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления коэффициентами квазилинейного параболического уравнения и с

функционалом цели по границе области. Исследованы вопросы корректности постановки задачи, получены формулы для дифференциала и градиента функционала цели, установлено необходимое условие оптимальности.

### 1. Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается в  $Q_T = \{(x, t): 0 < x < \ell, 0 < t < T\}$  следующей смешанной начально-краевой задачей для квазилинейного параболического уравнения:

$$u_t - (k(x, t)u_x)_x + q(x, t)a(u) + f(x, t, u) = 0, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad [k(x, t)u_x + p(t)u]|_{x=\ell} = g(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

где  $a(u), f(x, t, u), \varphi(x), g(t)$ -известные функции,  $k(x, t), q(x, t), p(t)$ -управляющие функции,  $v = (k(x, t), q(x, t), p(t))$ -управление,  $u = u(x, t) = u(x, t; v)$  - решение задачи, (1)-(3)-состояние процесса, соответствующее управлению  $v$ .

Введем множество допустимых управлений

$$V = V_1 \times V_2 \times V_3 \subset B = W_\infty^1(Q_T) \times L_\infty(Q_T) \times W_\infty^1(0, T),$$

при

$$V_1 = \{k(x, t) \in W_\infty^1(Q_T): 0 < v \leq k(x, t) \leq \mu, |k_x(x, t)| \leq \mu_1, |k_t(x, t)| \leq \mu_2 \text{ н.в.на } Q_T\},$$

$$V_2 = \{q(x, t) \in L_\infty(Q_T): 0 \leq q_0 \leq q(x, t) \leq q_1 \text{ н.в.на } Q_T\}, \quad (4)$$

$$V_3 = \{p(t) \in W_\infty^1(0, T): 0 \leq p_0 \leq p(t) \leq p_1, |p'(t)| \leq p_2 \text{ н.в.на } [0, T]\},$$

где  $\mu \geq v > 0, \mu_1, \mu_2, p_2 > 0, q_1 \geq q_0 \geq 0, p_1 \geq p_0 \geq 0$  - заданные числа.

Зададим функционал цели  $J: V \rightarrow R$  в виде

$$J(v) = \alpha_1 \int_0^T |u(\ell, t; v) - u_1(t)|^2 dt + \alpha_2 \int_0^\ell |u(x, T; v) - u_2(x)|^2 dx, \quad (5)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 > 0$  - заданные числа,  $u_1(t), u_2(x)$  - известные функции.

Поставим следующую задачу оптимального управления: на решениях  $u = u(x, t) = u(x, t; v)$  краевой задачи (1)-(3), соответствующих всем допустимым управлениям  $v \in V$ , минимизировать функционал (5). Эту задачу ниже будем называть задачей (1)-(5).

Будем предполагать, что выполняются условия

$$1) \quad \varphi(x) \in W_{2,0}^1(0, \ell), \quad g(t) \in W_2^1(0, T), \quad u_1(t) \in L_2(0, T), \quad u_2(x) \in L_2(0, \ell);$$

функция  $a(u)$  определена на  $R$  со значениями в  $R$  и для всех  $u_1, u_2 \in R$  удовлетворяет условиям

$$a(0)=0, 0 \leq [a(u_1) - a(u_2)](u_1 - u_2) \leq L_1 |u_1 - u_2|^2, L_1 = \text{const} > 0; \quad (6)$$

функция  $f(x, t, u)$  измерима по  $(x, t) \in Q_T$  и непрерывна по  $u \in R$ , при почти всех  $(x, t) \in Q_T$  и для всех  $u_1, u_2 \in R$  справедливы соотношения

$$f(x, t, 0) = 0, 0 \leq [f(x, t, u_1) - f(x, t, u_2)](u_1 - u_2) \leq L_2 |u_1 - u_2|^2, L_2 = \text{const} > 0. \quad (7)$$

Обозначения используемых в работе функциональных пространств соответствуют принятым в [13, 12]. Через  $W_{2,0}^1(0, \ell)$ ,  $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$ ,  $W_{2,0}^1(Q_T)$  обозначаются подпространства пространств  $W_2^1(0, \ell)$ ,  $V_2^{1,0}(Q_T)$ ,  $W_2^1(Q_T)$ , соответственно, элементы некоторых обращаются в нуль при  $x = 0$ . Ниже положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и допустимых управлений, обозначаются через  $M_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ).

Под решением краевой задачи (1)-(3), соответствующим управлению  $v \in V$ , будем понимать обобщенное решение из  $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$ , т.е. функцию  $u = u(x, t) = u(x, t; v) \in V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$ , удовлетворяющую для всех  $\eta = \eta(x, t) \in W_{2,0}^1(Q_T)$ ,  $\eta(x, T) = 0$  интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} [-u \eta_t + k(x, t) u_x \eta_x + q(x, t) a(u) \eta + f(x, t, u) \eta] dx dt + \int_0^T p(t) u(\ell, t; v) \eta(\ell, t) dt = \\ = \int_0^\ell \varphi(x) \eta(x, 0) dx + \int_0^T g(t) \eta(\ell, t) dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Можно показать [13, зл. V, § 5], [14, 94], что при каждом фиксированном  $v \in V$  существует единственное обобщенное решение  $u = u(x, t; v)$  краевой задачи (1)-(3) из  $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$  и справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{V_{2,0}^{1,0}(Q_T)} \leq M_1 [\|\varphi\|_{L_2(0, \ell)} + \|g\|_{L_2(0, T)}]. \quad (9)$$

Более того, обобщенное решение  $u = u(x, t; v) \in V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$  краевой задачи (1)-(3) принадлежит также пространству  $W_{2,0}^{2,1}(Q_T) = W_2^{2,1}(Q_T) \cap W_{2,0}^1(Q_T)$  и справедлива оценка

$$\|u\|_{W_{2,0}^{2,1}(Q_T)} \leq M_2 [\|\varphi\|_{W_2^1(0, \ell)} + \|g\|_{W_2^1(0, T)}]. \quad (10)$$

Рассуждая аналогично работе [8], используя оценки (10) и теорем вложения [13, с. 78, 98], [15, 33, 35], можно показать, что для решения краевой задачи (1)-(3) справедлива также оценка

$$\|u\|_{L_\infty(Q_T)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)} + \|u(\ell, t; v)\|_{L_{r_1}(0, T)} + \|u(x, T; v)\|_{W_2^1(0, \ell)} \leq M_3 [\|\varphi\|_{W_2^1(0, \ell)} + \|g\|_{W_2^1(0, T)}], \quad (11)$$

в которой  $r_1 \geq 2$  - произвольное конечное число.

Из оценки (11) следует, что функционал (5) определен на  $V$  принимает конечные значения. Отметим, что функционал (5) не является вы-

пуклым.

## 2. Корректность постановки задачи

Введем пространство  $H = W_2^1(Q_T) \times L_2(Q_T) \times W_2^1(0, T)$ . Корректность постановки задачи (1)-(5) в пространстве  $H$  устанавливает

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия 1). Тогда существует по крайней мере одно оптимальное управление  $v_* = (k_*(x, t), q_*(x, t), p_*(t)) \in V$  задачи (1)-(5), т.е.  $V_* = \{v_* \in V : J(v_*) = J_* = \inf\{J(v) : v \in V\}\} \neq \emptyset$ . Множество оптимальных управлений  $V_*$  в задаче (1)-(5) слабо компактно в  $H$  и любая минимизирующая последовательность  $\{v^{(n)}\} = \{(k^{(n)}(x, t), q^{(n)}(x, t), p^{(n)}(t))\} \subset V$  функционала (5) слабо в  $H$  сходится к множеству  $V_*$ .

**Доказательство.** Покажем, что функционал (5) слабо в  $H$  непрерывен на множестве  $V$ . Пусть  $v = (k(x, t), q(x, t), p(t)) \in V$  - некоторый элемент,

$\{v^{(n)}\} = \{(k^{(n)}(x, t), q^{(n)}(x, t), p^{(n)}(t))\} \subset V$  - произвольная последовательность такая, что  $v^{(n)} \rightarrow v$  слабо в  $H$ , т.е.

$$k^{(n)}(x, t) \rightarrow k(x, t) \text{ слабо в } W_2^1(Q_T), \quad (12)$$

$$q^{(n)}(x, t) \rightarrow q(x, t) \text{ слабо в } L_2(Q_T), \quad (13)$$

$$p^{(n)}(t) \rightarrow p(t) \text{ слабо в } W_2^1(0, T). \quad (14)$$

Из компактности вложений  $W_2^1(Q_T) \rightarrow L_{r_2}(Q_T)$ ,  $W_2^1(0, T) \rightarrow L_\infty(0, T)$  [13, 78] следует, что

$$k^{(n)}(x, t) \rightarrow k(x, t) \text{ сильно в } L_{r_2}(Q_T), \quad (15)$$

$$p^{(n)}(t) \rightarrow p(t) \text{ сильно в } L_\infty(0, T), \quad (16)$$

где  $r_2 \geq 2$  - произвольное конечное число.

Кроме того, в силу однозначной разрешимости задачи (1)-(3), каждому управлению  $v^{(n)} \in V$  соответствует единственное решение  $u^{(n)} = u(x, t; v^{(n)}) \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$  задачи (1)-(3) при  $v = v^{(n)}$  и справедлива оценка

$$\|u^{(n)}\|_{W_{2,0}^{2,1}(Q_T)} \leq M_4 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (17)$$

т.е. последовательность  $\{u^{(n)}\}$  равномерно ограничена в норме пространства  $W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ .

Тогда из компактности вложения  $W_{2,0}^{2,1}(Q_T) \rightarrow L_{r_3}(Q_T)$  [15, 33, 39] и отображений  $u \rightarrow u|_{t=T}$ ,  $u \rightarrow u|_{x=\ell}$  пространства  $W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$  в  $L_\infty(0, \ell)$ ,  $L_{r_4}(0, T)$  [13, с. 78], соответственно, следует, что из последовательности  $\{u^{(n)}\}$  мож-

но извлечь подпоследовательность  $\{u^{(n_m)}\}$  такую, что

$$u^{(n_m)}(x, t) \rightarrow u(x, t) \text{ слабо в } W_{2,0}^{2,1}(Q_T) \text{ и сильно в } L_{r_3}(Q_T), \quad (18)$$

$$u^{(n_m)}(x, T) \rightarrow u(x, T) \text{ сильно в } L_\infty(0, \ell), \quad (19)$$

$$u^{(n_m)}(\ell, t) \rightarrow u(\ell, t) \text{ сильно в } L_{r_4}(0, T), \quad (20)$$

где  $r_3, r_4 \geq 2$  - произвольные конечные числа,  $u(x, t)$ -некоторый элемент из  $W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$ .

Покажем, что  $u(x, t) = u(x, t; \nu)$ , т.е.  $u(x, t)$  является решением задачи (1)-(3), соответствующим управлению  $\nu \in V$ . Ясно, что справедливы тождества

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} [-u^{(n_m)} \eta_t + k^{(n_m)}(x, t) u_x^{(n_m)} \eta_x + q^{(n_m)}(x, t) a(u^{(n_m)}) \eta + f(x, t, u^{(n_m)}) \eta] dx dt + \\ & + \int_0^T p^{(n_m)}(t) u^{(n_m)}(\ell, t) \eta(\ell, t) dt = \int_0^\ell \varphi(x) \eta(x, 0) dx + \int_0^T g(t) \eta(\ell, t) dt, \\ & \forall \eta = \eta(x, t) \in W_{2,0}^1(Q_T), \eta(x, T) = 0, m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Используя соотношения (15), (18), оценки (17) и неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Q_T} k^{(n_m)}(x, t) u_x^{(n_m)} \eta_x dx dt - \int_{Q_T} k(x, t) u_x \eta_x dx dt \right| \leq \left| \int_{Q_T} k(x, t) u_x^{(n_m)} \eta_x dx dt - \int_{Q_T} k(x, t) u_x \eta_x dx dt \right| + \\ & + \left| \int_{Q_T} [k^{(n_m)}(x, t) - k(x, t)] u_x^{(n_m)} \eta_x dx dt \right| \leq \left| \int_{Q_T} k(x, t) u_x^{(n_m)} \eta_x dx dt - \int_{Q_T} k(x, t) u_x \eta_x dx dt \right| + \\ & + \|k^{(n_m)} - k\|_{L_3(Q_T)} \|u_x^{(n_m)}\|_{L_6(Q_T)} \|\eta_x\|_{L_2(Q_T)} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (22)$$

при  $m \rightarrow \infty$ .

Кроме того, используя условие (6) и соотношения (13), (18), получаем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Q_T} q^{(n_m)}(x, t) a(u^{(n_m)}) \eta dx dt - \int_{Q_T} q(x, t) a(u) \eta dx dt \right| \leq \left| \int_{Q_T} q^{(n_m)}(x, t) [a(u^{(n_m)}) - a(u)] \eta dx dt \right| + \\ & + \left| \int_{Q_T} [q^{(n_m)}(x, t) - q(x, t)] a(u) \eta dx dt \right| \leq q_1 L_1 \|u^{(n_m)} - u\|_{L_2(Q_T)} \|\eta\|_{L_2(Q_T)} + \\ & + \left| \int_{Q_T} [q^{(n_m)}(x, t) - q(x, t)] a(u) \eta dx dt \right| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Далее, используя условие (7) и соотношение (18), имеем

$$\left| \int_{Q_T} f(x, t, u^{(n_m)}) \eta dx dt - \int_{Q_T} f(x, t, u) \eta dx dt \right| \leq L_2 \|u^{(n_m)} - u\|_{L_2(Q_T)} \|\eta\|_{L_2(Q_T)} \rightarrow 0. \quad (24)$$

Наконец, используя соотношения (16) и (20), получаем, что

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T p^{(n_m)}(t) u^{(n_m)}(\ell, t) \eta(\ell, t) dt - \int_0^T p(t) u(\ell, t) \eta(\ell, t) dt \right| \leq \\ & \leq \left| \int_0^T p^{(n_m)}(t) [u^{(n_m)}(\ell, t) - u(\ell, t)] \eta(\ell, t) dt \right| + \left| \int_0^T [p^{(n_m)}(t) - p(t)] u(\ell, t) \eta(\ell, t) dt \right| \leq \\ & \leq p_1 \|u^{(n_m)}(\ell, t) - u(\ell, t)\|_{L_2(0, T)} \|\eta(\ell, t)\|_{L_2(0, T)} + \left| \int_0^T [p^{(n_m)}(t) - p(t)] u(\ell, t) \eta(\ell, t) dt \right| \rightarrow 0. \quad (25) \end{aligned}$$

Тогда переходя к пределу при  $m \rightarrow \infty$  в тождестве (22) и учитывая соотношения (18), (22)-(25), получаем, что функция  $u(x, t)$  удовлетворяет тождеству (18), т.е. является решением из  $W_{2,0}^{1,0}(Q_T)$  задачи (1)-(3), соответствующим управлению  $v \in V$ . Отсюда и из включения  $u(x, t) \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$  следует, что  $u(x, t) = u(x, t; v)$ .

Используя единственность решения краевой задачи (1)-(3), соответствующего управлению  $v \in V$ , нетрудно показать, что соотношения (18)-(20) справедливы с функцией  $u(x, t) = u(x, t; v)$  не только для подпоследовательности  $\{u^{(n_m)}\}$ , но и для всей последовательности  $\{u^{(n)}\}$ , т.е.

$$u^{(n)}(x, T) = u(x, T; v^{(n)}) \rightarrow u(x, T) = u(x, T; v) \text{ сильно в } L_\infty(0, \ell), \quad (26)$$

$$u^{(n)}(\ell, t) = u(\ell, t; v^{(n)}) \rightarrow u(\ell, t) = u(\ell, t; v) \text{ сильно в } L_{13}(0, \ell). \quad (27)$$

Тогда, используя соотношения (26), (27) и равенство (5) получаем, что  $J(v^{(n)}) \rightarrow J(v)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Таким образом, установлено, что функционал (5) слабо в  $H$  непрерывен на множестве  $V$ . Кроме того, множество  $V$  выпукло, замкнуто и ограничено в рефлексивном банаховом пространстве  $H$  и поэтому оно слабо компактно в  $H$  [16, 49]. Тогда, применяя результат из [16, 49] устанавливаем, что справедливы все утверждения теоремы 1. Теорема 1 доказана.

### 3. Дифференцируемость функционала цели и необходимое условие оптимальности

Пусть выполняются условия

2) функция  $a(u)$  имеет непрерывную по  $u \in R$  производную  $a'(u)$ , для каждого  $h > 0$  существует постоянная  $c_h > 0$  такая, что  $|a'(u)| \leq c_h$  для всех  $u \in [-h, h]$ , и справедливо неравенство

$$|a'(u_1) - a'(u_2)| \leq L_3 |u_1 - u_2|, \quad u_1, u_2 \in R, \quad L_3 = \text{const} > 0;$$

функция  $f(x, t, u)$  имеет по  $u \in R$  частную производную  $f'_u(x, t, u)$  измеримую по  $(x, t) \in Q_T$  и непрерывную по  $u \in R$ , для каждого  $h > 0$  существует функция  $d_h(x, t) \in L_\infty(Q_T)$  такая, что  $|f'_u(x, t, u)| \leq d_h(x, t)$  при почти всех  $(x, t) \in Q_T$  и для всех  $u \in [-h, h]$ , и справедливо неравенство  $|f'_u(x, t, u_1) - f'_u(x, t, u_2)| \leq L_4 |u_1 - u_2|$ ,  $L_4 = \text{const} > 0$  при почти всех  $(x, t) \in Q_T$  и для всех  $u_1, u_2 \in R$ .

Отметим, что из условия 2) следует, что операторы порожденные функциями  $a(u(x, t)), f'_u(x, t, u(x, t))$  непрерывно действуют из  $L_\infty(Q_T)$  в  $L_\infty(Q_T)$  [17, с. 376].

Для задачи (1)-(5) введем сопряженное состояние  $\psi = \psi(x, t) = \psi(x, t; \nu)$  как решение задачи

$$\psi_t + (k(x, t)\psi_x)_x - q(x, t)a'(u)\psi - f'_u(x, t, u)\psi = 0, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (28)$$

$$\psi|_{t=T} = -2\alpha_2 [u(x, T; \nu) - u_2(x)], \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (29)$$

$$\psi|_{x=0} = 0, \quad [k(x, t)\psi_x + p(t)\psi]_{x=\ell} = -2\alpha_1 [u(\ell, t; \nu) - u_1(t)], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (30)$$

Под решением краевой задачи (28)-(30), соответствующим управлению  $\nu \in V$ , будем понимать функцию  $\psi = \psi(x, t) = \psi(x, t; \nu)$  из  $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$ , удовлетворяющую для всех  $\eta = \eta(x, t) \in W_2^1(Q_T)$ ,  $\eta(x, 0) = 0$  интегральную тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} [\psi \eta_t + k(x, t)\psi_x \eta_x + q(x, t)a'(u)\psi \eta + f'_u(x, t, u)\psi \eta] dx dt + \int_0^T p(t)\psi(\ell, t; \nu)\eta(\ell, t) dt = \\ & = -2\alpha_1 \int_0^T [u(\ell, t; \nu) - u_1(t)] \eta(\ell, t) dt - 2\alpha_2 \int_0^\ell [u(x, T; \nu) - u_2(x)] \eta(x, T) dx. \end{aligned} \quad (31)$$

Из результатов монографии [13, с. 197 – 201] следует, что для каждого заданного  $\nu \in V$  задача (28)-(30) имеет единственное решение из  $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$  и справедлива оценка

$$\|\psi\|_{V_{2,0}^{1,0}(Q_T)} \leq M_5 [\alpha_1 \|u(\ell, t; \nu) - u_1(t)\|_{L_2(0,T)} + \alpha_2 \|u(x, T; \nu) - u_2(x)\|_{L_2(0,\ell)}].$$

Учитывая здесь оценки (11), получаем оценку

$$\|\psi\|_{V_{2,0}^{1,0}(Q_T)} \leq M_6 [\|\varphi\|_{W_2^1(0,\ell)} + \|g\|_{W_2^1(0,T)} + \alpha_1 \|u_1\|_{L_2(0,T)} + \alpha_2 \|u_2\|_{L_2(0,\ell)}] \quad (32)$$

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия 1) и 2). Тогда функционал (5) дифференцируем на  $V$  в норме пространства  $H$  и его дифференциал  $dJ(\nu, \Delta \nu)$  в точке  $\nu \in V$  при приращении  $\Delta \nu = (\Delta k, \Delta q, \Delta p) \in H$  определяется равенством

$$dJ(v, \Delta v) = \int_{Q_T} (u_x \psi_x \Delta k + a(u) \psi \Delta q) dx dt + \int_0^T u(\ell, t; v) \psi(\ell, t; v) \Delta p(t) dt \quad (33)$$

**Доказательство.** Пусть  $v, v + \Delta v \in V$  - произвольные управления и  $\Delta u = \Delta u(x, t) = u(x, t; v + \Delta v) - u(x, t; v)$ ,  $u = u(x, t) = u(x, t; v)$ . Из условий (1)-(3) следует, что функция  $\Delta u$  является решением из  $W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$  линеаризованной краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta u_t - ((k + \Delta k) \Delta u_x)_x + (q + \Delta q) a'(u + \theta_1 \Delta u) \Delta u + f'_u(x, t, u + \theta_2 \Delta u) \Delta u = \\ = (\Delta k u_x)_x - \Delta q a(u), \quad (x, t) \in Q_T, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\Delta u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (35)$$

$$\Delta u|_{x=0} = 0, \quad [(k + \Delta k) \Delta u_x + (p + \Delta p) \Delta u]|_{x=\ell} = -[\Delta k u_x + \Delta p u]|_{x=\ell}, \quad 0 < t \leq T, \quad (36)$$

где  $\theta_1, \theta_2 \in [0, 1]$  - некоторые числа.

Можно показать, что при сделанных предположениях для функции  $\Delta u$  справедлива оценка [13, с. 164 – 169, 197 – 201]

$$\|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq M_7 [\|\Delta k u_x\|_{L_2(Q_T)} + \|\Delta q a(u)\|_{L_2(Q_T)} + \|\Delta p(t) u(\ell, t)\|_{L_2(0,T)}]. \quad (37)$$

Используя ограниченность вложений  $W_2^1(Q_T) \rightarrow L_4(Q_T)$ ,  $W_2^1(0, T) \rightarrow L_\infty(0, T)$  [13, 78] условие (6) и оценки (11), получаем следующие неравенства:

$$\|\Delta k u_x\|_{L_2(Q_T)} \leq \|\Delta k\|_{L_4(Q_T)} \|u_x\|_{L_4(Q_T)} \leq M_8 \|\Delta k\|_{W_2^1(Q_T)},$$

$$\|\Delta q a(u)\|_{L_2(Q_T)} \leq L_1 \|\Delta q u\|_{L_2(Q_T)} \leq L_1 \|\Delta q\|_{L_2(Q_T)} \|u\|_{L_\infty(Q_T)} \leq M_9 \|\Delta q\|_{L_2(Q_T)},$$

$$\|\Delta p(t) u(\ell, t)\|_{L_2(0,T)} \leq \|\Delta p(t)\|_{L_\infty(0,T)} \|u(\ell, t)\|_{L_2(0,T)} \leq M_{10} \|\Delta p\|_{W_2^1(0,T)}.$$

Учитывая эти неравенства в (37), получаем оценку

$$\|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq M_{11} \|\Delta v\|_H. \quad (38)$$

Приращение  $\Delta J(v) = J(v + \Delta v) - J(v)$  функционала (5) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta J(v) = 2\alpha_1 \int_0^T [u(\ell, t; v) - u_1(t)] \Delta u(\ell, t) dt + 2\alpha_2 \int_0^\ell [u(x, T; v) - u_2(x)] \Delta u(x, T) dx + \\ + \alpha_1 \|\Delta u(\ell, t)\|_{L_2(0,T)}^2 + \alpha_2 \|\Delta u(x, T)\|_{L_2(0,\ell)}^2. \end{aligned} \quad (39)$$

С помощью решений краевых задач (28)-(30) и (34)-(36) преобразуем приращение (39). Для решения краевой задачи (34)-(36) справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} [\Delta u_t \psi + (k + \Delta k) \Delta u_x \psi_x + (q + \Delta q) a'(u + \theta_1 \Delta u) \Delta u \psi + f'_u(x, t, u + \theta_2 \Delta u) \Delta u \psi] dx dt + \\ + \int_0^T (p + \Delta p) \Delta u(\ell, t) \psi(\ell, t; v) dt = \int_{Q_T} [u_x \psi_x \Delta k + a(u) \psi \Delta q] dx dt + \int_0^T u(\ell, t; v) \psi(\ell, t; v) \Delta p(t) dt. \end{aligned} \quad (40)$$

Если в тождестве (31) положим  $\eta = \Delta u$  и полученное равенство вычтем

из (40), то получим равенство

$$\begin{aligned}
& 2\alpha_1 \int_0^T [u(\ell, t; \nu) - u(t)] \Delta u(\ell, t) dt + 2\alpha_2 \int_0^\ell [u(x, T; \nu) - u_2(x)] \Delta u(x, T) dx = \\
& = \int_{Q_T} [u_x \psi_x \Delta k + a(u) \psi \Delta q] dx dt + \int_0^T u(\ell, t; \nu) \psi(\ell, t; \nu) \Delta p(t) dt + \int_{Q_T} [\Delta u_x \psi_x \Delta k + \\
& + ((q + \Delta q) a'(u + \theta_1 \Delta u) - q a'(u)) \Delta u \psi + (f'_u(x, t, u + \theta_2 \Delta u) - f'_u(x, t, u)) \Delta u \psi] dx dt + \\
& + \int_0^T \Delta u(\ell, t) \psi(\ell, t; \nu) \Delta p(t) dt.
\end{aligned}$$

Учитывая это равенство в (39), имеем

$$\Delta J(\nu) = \int_{Q_T} [u_x \psi_x \Delta k + a(u) \psi \Delta q] dx dt + \int_0^T u(\ell, t; \nu) \psi(\ell, t; \nu) \Delta p(t) dt + R, \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned}
R = & \alpha_1 \|\Delta u(\ell, t)\|_{L_2(0, T)}^2 + \alpha_2 \|\Delta u(x, T)\|_{L_2(0, \ell)}^2 + \int_{Q_T} [\Delta u_x \psi_x \Delta k + ((q + \Delta q) a'(u + \theta_1 \Delta u) - q a'(u)) \Delta u \psi + \\
& + (f'_u(x, t, u + \theta_2 \Delta u) - f'_u(x, t, u)) \Delta u \psi] dx dt + \int_0^T \Delta u(\ell, t) \psi(\ell, t; \nu) \Delta p(t) dt. \quad (42)
\end{aligned}$$

Используя теорему вложения [13, 78, 98] нетрудно показать, что сумма первых двух слагаемых в правой части (41), т.е. выражение (33), при заданном  $\nu \in V$  определяет линейный ограниченный функционал от  $\Delta \nu \in H$ .

Теперь проведем оценку остаточного члена  $R$ , определяемого равенством (42). Используя ограниченность вложения  $W_2^1(Q_T) \rightarrow L_4(Q_T)$  [13, 78], неравенство Коши-Буняковского и оценки (32), (38) имеем

$$\left| \int_{Q_T} \Delta u_x \psi_x \Delta k dx dt \right| \leq \|\Delta k\|_{L_4(Q_T)} \|\Delta u_x\|_{L_4(Q_T)} \|\psi_x\|_{L_2(Q_T)} \leq M_{12} \|\Delta \nu\|_H^2. \quad (43)$$

Далее, используя условия 2), неравенство Гельдера [13, 75] и оценки (32), (38), получаем неравенства

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{Q_T} [(q + \Delta q) a'(u + \theta_1 \Delta u) - q a'(u)] \Delta u \psi dx dt \right| \leq \int_{Q_T} |(q + \Delta q) [a'(u + \theta_1 \Delta u) - a'(u)] \Delta u \psi| dx dt + \\
& + \int_{Q_T} |\Delta q a'(u) \Delta u \psi| dx dt \leq q_1 L_3 \theta_1 \int_{Q_T} |\Delta u|^2 |\psi| dx dt + \|\Delta q\|_{L_2(Q_T)} \|a'(u)\|_{L_\infty(Q_T)} \|\Delta u\|_{L_4(Q_T)} \|\psi\|_{L_4(Q_T)} \leq \\
& \leq q_1 L_3 \theta_1 \|\Delta u\|_{L_3(Q_T)}^2 \|\psi\|_{L_3(Q_T)} + \|\Delta q\|_{L_2(Q_T)} \|a'(u)\|_{L_\infty(Q_T)} \|\Delta u\|_{L_4(Q_T)} \|\psi\|_{L_4(Q_T)} \leq M_{12} \|\Delta \nu\|_H^2, \quad (44) \\
& \left| \int_{Q_T} [f'_u(x, t, u + \theta_2 \Delta u) - f'_u(x, t, u)] \Delta u \psi dx dt \right| \leq L_4 \theta_2 \int_{Q_T} (\Delta u)^2 |\psi| dx dt \leq L_4 \theta_2 \|\Delta u\|_{L_3(Q_T)}^2 \|\psi\|_{L_3(Q_T)} \leq
\end{aligned}$$

$$\leq M_{14} \|\Delta v\|_H^2 \quad (45)$$

Наконец, используя ограниченность вложения  $W_2^1(Q_T) \rightarrow L_4(Q_T)$  и ограниченность отображения  $u \rightarrow u|_{x=\ell}$  пространства  $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$  в  $L_2(0,T)$  [13, 78], и оценки (32), (38), получаем неравенство

$$\left| \int_0^T \Delta u(\ell, t) \psi(\ell, t) \Delta p(t) dt \right| \leq \|\Delta p\|_{L_\infty(0,T)} \|\Delta u(\ell, t)\|_{L_2(0,T)} \|\psi(\ell, t)\|_{L_2(0,T)} \leq M_{15} \|\Delta v\|_H^2. \quad (46)$$

Учитывая оценки (38) и неравенства (43)-(46) в (42), получаем оценки

$$|R| \leq M_{16} \|\Delta v\|_H^2. \quad (47)$$

Учитывая в (41) эту оценку, заключаем, что функционал (5) дифференцируем по Фреше на  $V$  и его дифференциал определяется выражением (33). Теорема 2 доказана.

Теперь получим явное выражение для градиента функционала (5). Поставим следующую вспомогательную краевую задачу для определения функции  $\omega = \omega(x, t) = \omega(x, t; v)$  из условий:

$$-\omega_{xx} - \omega_t + \omega = u_x \psi_x, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (48)$$

$$\omega_x|_{x=0} = \omega_x|_{x=\ell} = 0, \quad 0 < x < \ell, \quad (49)$$

$$\omega_t|_{t=0} = \omega_t|_{t=T} = 0, \quad 0 < t < T. \quad (50)$$

Под решением краевой задачи (48)-(50) при заданном  $v \in V$  будем понимать функцию  $\omega = \omega(x, t) = \omega(x, t; v)$  из  $W_2^1(Q_T)$ , удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} (\omega_x \eta_x + \omega_t \eta_t + \omega \eta) dx dt = \int_{Q_T} u_x \psi_x \eta dx dt \quad (51)$$

при любой функции  $\eta = \eta(x, t) \in W_2^1(Q_T)$ .

Из включений  $u_x \in L_6(Q_T), \psi(x) \in L_2(Q_T)$  следует, что  $u_x \psi_x \in L_{6/5}(Q_T)$ . Тогда из результатов работы [18, 200 – 202] следует, что краевая задача (48)-(50) при заданном  $v \in V$  однозначно разрешима в  $W_2^1(Q_T)$ .

Поставим следующую вторую вспомогательную краевую задачу для определения функции  $\theta = \theta(t) = \theta(t; v)$  из условий:

$$-\theta'' + \theta = u(\ell, t; v) \psi(\ell, t; v), \quad 0 < t < T, \quad (52)$$

$$\theta'(0) = \theta'(T) = 0. \quad (53)$$

Под решением задачи (52)-(53) при заданном  $v \in V$  будем понимать функцию  $\theta = \theta(t) = \theta(t; v)$  из  $W_2^1(0, T)$ , удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_0^T (\theta' \eta + \theta \eta) dt = \int_0^T u(\ell, t; \nu) \psi(\ell, t; \nu) \eta(t) dt \quad (54)$$

при любой функции  $\eta = \eta(x, t) \in W_2^1(0, T)$ .

Из включений  $u(\ell, t; \nu) \in L_{r_1}(0, T)$  ( $\forall r_1 \geq 2$ ),  $\psi(\ell, t; \nu) \in L_4(0, T)$  следует, что  $u(\ell, t; \nu) \psi(\ell, t; \nu) \in L_2(0, T)$ . Тогда из результатов работы [18, 200–202] следует, что краевая задача (52), (53) при заданном  $\nu \in V$  однозначно разрешима в  $W_2^1(0, T)$ .

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия 1) и 2). Тогда градиент функционала (5) в произвольной точке  $\nu \in V$  определяется равенством

$$J'(\nu) = (\omega(x, t; \nu), u(x, t; \nu) \psi(x, t; \nu), \theta(t)) \quad (55)$$

и отображение  $\nu \rightarrow J'(\nu)$  непрерывно действует из  $V$  в  $H$ .

**Доказательство.** Пусть  $\nu, \nu + \Delta \nu \in V$  - произвольные управления, где  $\Delta \nu = (\Delta k, \Delta q, \Delta p) \in H$  - приращение управления на элементе  $\nu = (k, q, p) \in V$ .

Полагая в тождестве (51)  $\eta = \Delta k$ , а в тождестве (54)  $\eta = \Delta p$ , получаем равенства

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} (\omega_x \Delta k_x + \omega_t \Delta k_t + \omega \Delta k) dx dt &= \int_{Q_T} u_x \psi_x \Delta k dx dt, \\ \int_0^T (\theta' \Delta p' + \theta \Delta p) dt &= \int_0^T u(\ell, t; \nu) \psi(\ell, t; \nu) \Delta p(t) dt, \end{aligned}$$

учитывая которых в (33), имеем

$$dJ(u, \nu) = \langle J'(\nu), \Delta \nu \rangle_H = \int_{Q_T} (\omega_x \Delta k_x + \omega_t \Delta k_t + \omega \Delta k + a(u) \psi \Delta q) dx dt + \int_0^T (\theta' \Delta p' + \theta \Delta p) dt,$$

где  $\langle J'(\nu), \Delta \nu \rangle_H$  - скалярное произведение элементов  $J'(\nu), \Delta \nu \in H$  на  $H$ . Отсюда следует, что градиент функционала (5) определяется равенством (55).

Используя априорные оценки для краевых задач (1)-(3), (28)-(30), (48)-(50), (52), (53) и рассуждая аналогично выводу оценки (47) можно показать, что справедливо неравенство  $\|J'(\nu + \Delta \nu) - J'(\nu)\|_H \leq M_{17} \|\Delta \nu\|_H$ , откуда следует непрерывность отображения  $\nu \rightarrow J'(\nu)$  из  $V$  в  $H$ . Теорема 3 доказана.

Необходимое условие оптимальности в задаче (1)-(5) устанавливает

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия 1) и 2). Тогда для оптимальности управления

$\nu_* = (k_*, q_*, p_*) \in V$  в задаче (1)-(5) необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_{Q_T} [\omega_{*x}(k_x - k_{*x}) + \omega_{*t}(k_t - k_{*t}) + \omega_*(k - k_*) + a(u_*)\psi_*(q - q_*)] dxdt + \int_0^T [\theta'_*(p' - p'_*) + \theta_*(p - p_*)] dt \geq 0 \quad (56)$$

для любого  $v = (k, q, p) \in V$ , где  $u_* = u(x, t; v_*)$ ,  $\psi_* = \psi(x, t; v_*)$ ,  $\omega_* = \omega(x, t; v_*)$ ,  $\theta_* = \theta(t; v_*)$  - решения задач (1)-(3), (28)-(30), (48)-(50), (52), (53), соответственно, при  $v = v_*$ .

**Доказательство.** Множество  $V$ , определяемое соотношениями (4), выпукло в  $H$ . Кроме того, согласно теорем 2 и 3 функционал  $J(v)$  непрерывно дифференцируем по Фреше на  $V$ . Тогда в силу теоремы 5 из [16, с. 28] на элементе  $v_* \in V_*$  необходимо выполнение неравенства  $\langle J'(v_*), v - v_* \rangle_H \geq 0$  при всех  $v \in V$ . Отсюда и из (55) следует справедливость неравенства (56). Теорема 4 доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 414 с.
2. Murat F. Contre-exemples pour divers problèmes on le contrôle intervient dans les coefficients // Ann. Mat. Pura. Appl. 1977, v. 112, p. 49-68.
3. Искендеров А.Д., Тагиев Р.К. Задачи оптимизации с управлениями в коэффициентах параболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1983. Т.19. № 8. С. 1324-1334.
4. Zolezzi T. Necessary Conditions for Optimal Control of Elliptic or Parabolic Problems // SIAM J. Control. 1972, v. 4. No 2, p.594-602.
5. Sokolowski J. Remarks on Existence of Solution for Parametric Optimization Problems for Partial Differential Equations of Parabolic Type // Control. Cybernetics. 1978, v.7, No 2, p. 47-61.
6. Серовайский С.Я. Задачи оптимального управления в коэффициентах для уравнения параболического типа // Изв. Вузов. Сер. Мат. 1982. № 12. С.44-50.
7. Hew R.J. Optimal Control of the Convective Velocity Coefficient in a Parabolic Equation // Nonlinear Anal. 2005, v. 63, p. 1383-1390.
8. Тагиев Р.К. Оптимальное управление коэффициентами в параболических системах // Дифференц. уравнения. 2009, т. 45, № 10, с. 1492-1501,
9. Новоженов М.М., Плотников В.И. Обобщенное правило множителей Лагранжа для распределенных систем с фазовыми ограничениями // Дифференц. уравнения. 1982, т. 18, № 4, с. 584-592.
10. Новоженов М.М., Сумин М.И. Оптимальное управление полулинейным параболическим уравнением с поточечным фазовым ограничением // Вестн. Нижегород. Гос. Ун-та. 2001, № 2, с. 261-269.
11. Тагиев Р.К. Оптимальное управление коэффициентами квазилинейного параболического уравнения // Автоматика и телемеханика. 2009, № 11, с. 55-69.
12. Тагиев Р.К. Задача оптимального управления для квазилинейного параболического уравнения с управлениями в коэффициентах и с фазовыми ограничениями // Дифференц. уравнения. 2013, т. 49, № 3, с. 380-392.
13. Ладженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, 736 с.

14. Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978, 336 с.
15. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами М.: Наука, 1987, 386 с.
16. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.
17. Забрейко П.П., Кошелов А.И., Красносельский М.А. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968, 448 с.
18. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973, 576 с.

## KVAZİXƏTTİ PARABOLİK TƏNLİYİN ƏMSALLARI İLƏ OPTİMAL İDARƏETMƏ HAQQINDA

R.Q.TAĞIYEV, R.A.QASIMOV

### XÜLASƏ

İşdə əmsallarında idarəedicilər olan kvazixətti parabolik tənlik üçün oblastın sərhədi üzrə məqsəd funksionallı optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Məsələnin qoyuluşunun korrektiliyi tədqiq olunmuş və optimallıq üçün zəruri şərt göstərilmişdir.

**Açar sözlər:** optimal idarəetmə, kvazixətti parabolik tənlik, optimallıq şərti

## OPTIMAL CONTROL BY THE COEFFICIENTS OF QUASILINEAR PARABOLIC EQUATIONS

R.G.TAGIYEV, R.A.GASIMOV

### SUMMARY

The paper studies an optimal control problem for a quasi-linear parabolic equation with controls in the coefficients and with the functional purpose on the border area. The correctness of the problem setting is studied and the necessary condition for optimality is shown.

**Key words:** optimal control, parabolic equation, optimality condition

*Поступила в редакцию: 11.11.2015 г.*

*Подписано к печати: 12.02.2016 г.*